Successioni e serie di funzioni

Lezione 1

Convergenza puntuale

Def. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni a valori reali (o complessi) definite sul medesimo insieme E. Diciamo che $\{f_n\}$ **converge puntualmente** in E se per ogni $x \in E$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ converge in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$). Posto

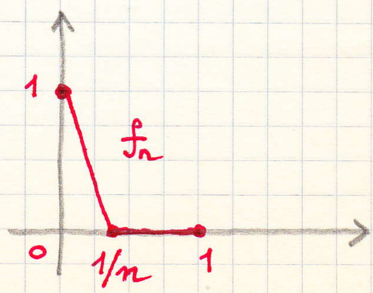
$$f(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in E,$$

la funzione f si chiama **limite puntuale di** $\{f_n\}$.
Similmente, se per ogni $x \in E$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $\mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$), allora diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente in E. La funzione

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in E$$

si dirà **somma puntuale** della serie $\sum f_n$ (oppure che $\sum f_n$ **converge puntualmente** a s)

Problema: quali proprietà godute da $\{f_n\}$ si "trasportano" al suo limite p.tuale f ?



Es. Sia $\{f_n\}$ come in figura.
Evidentemente f_n è continua in $[0,1]$, ma

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

LEZIONE 2

Convergenza uniforme e continuità

Teorema Supponiamo che $f_n \to f$ unif. in un sottoinsieme E di uno spazio metrico. Sia x di accumulazione per E e supponiamo che

$$\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n .$$

allora $\{A_n\}$ converge e

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{t \to x} f(t)$$

$$\left[\text{cioè, } \lim_{n \to +\infty} \lim_{t \to x} f_n(t) = \lim_{t \to x} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\right]$$

Dim. Poiché $f_n \to f$ unif.te (per ipotesi), $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n, m \geq N \quad \forall t \in E$

$$(*) \qquad |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon .$$

Facendo tendere t a x, abbiamo

$$(**) \qquad |A_n - A_m| \leq \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N .$$

Quindi $\{A_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow$ $\{A_n\}$ è convergente, diciamo ad A. Osserviamo che

$$|f(t) - A| \leq \underbrace{|f(t) - f_N(t)|}_{\substack{\leq \varepsilon \text{ per } (*) \\ \text{per ogni } t \in E}} + |f_N(t) - A_N| + \underbrace{|A_N - A|}_{\leq \varepsilon \text{ per } (**)}$$

Poiché $\lim_{t\to x} f_N(t) = A_N$, esiste un intorno U di x tale

che $\forall t\in U$, $t\neq x$

$$\left| f_N(t) - A_N \right| < \varepsilon$$

Perciò $\forall t\in U$, $t\neq x$

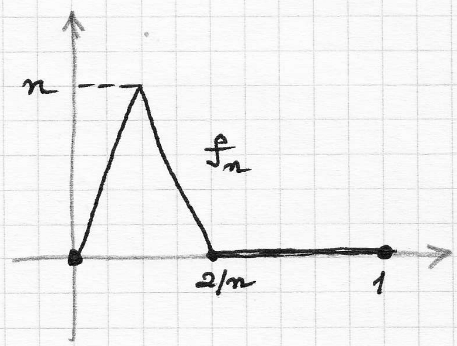
$$\left| f(t) - A \right| \leqslant 3\varepsilon$$

cioè la tesi. $\square$

__Corollario__ Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue in E unif.te convergente a f. Allora f è continua.

__Dim__. Segue direttamente dal teorema precedente. $\square$

__Oss__. Sia $\{f_n\}$ come in figura. Allora $f_n \in \mathscr{C}([0,1])$ $f_n \to 0$ pt.mente, la f.ne limite è continua, ma la convergenza __non__ è uniforme.
Quindi l'uniformità della convergenza è condizione sufficiente ma non necessaria per la continuità del limite di funzioni continue.



__Teorema__. Siano K compatto, $f_n \in \mathscr{C}(K)$, $f_n \to f$ pt.mente, $f \in \mathscr{C}(K)$. Se

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant \cdots,$$

allora $f_n \to f$ uniformemente.

Dim. Poniamo $g_n := f_n - f$. Le ipotesi implicano che $g_n \in \mathscr{C}(K)$, $g_n \to 0$ pt. mente; $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq 0$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato e poniamo

$$K_n := \{ x \in K : \quad g_n(x) \geq \varepsilon \}.$$

Evidentemente K_n è un sottoinsieme chiuso del compatto K, e quindi è compatto. Inoltre $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$

Poiché $g_n \to 0$ pt. mente

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset.$$

Per un noto risultato $\exists N :\ K_N = \emptyset$ e quindi

$$g_N(x) < \varepsilon \qquad \forall x \in K$$

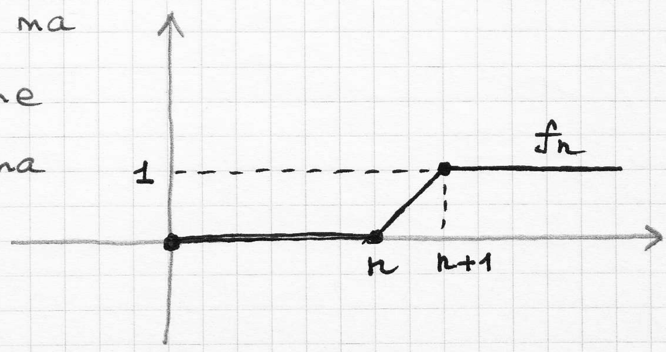
La monotonia di $\{g_N\}$ implica che

$$g_n(x) < \varepsilon \qquad \forall x \in K \quad \forall n \geq N$$

e quindi che $g_n \to 0$ unif. te. $\square$

Oss. La compattezza è essenziale nel teorema precedente, come mostrano i due esempi seguenti:

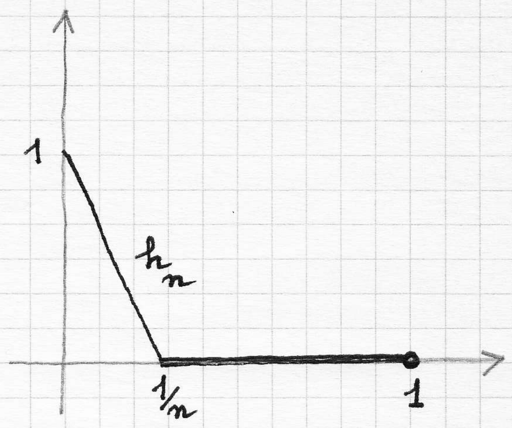
(I) $E = [0, +\infty)$, chiuso ma non limitato, $\{f_n\}$ come in figura; $f_n \downarrow 0$, ma



$$\sup_{x \geq 0} f_n(x) = 1$$

(II) $E = (0,1]$, limitato ma non chiuso, $\{h_n\}$ come in figura; $h_n \downarrow 0$, ma

$$\sup_{0<x\leq 1} h_n(x) = 1$$



<u>Oss.</u> $\mathcal{C}([0,1])$ ha <u>dimensione infinita</u> [i monomi x^n sono linearmente indipendenti]

Sia K compatto. Per ogni $f \in \mathcal{C}(K)$ poniamo

$$(*) \qquad \|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

È semplice verificare che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma, che viene detta **norma dell'estremo superiore.**

<u>N.B.</u> Poiché f continua $\Rightarrow |f|$ continua, l'estremo superiore che compare in $(*)$ è, in realtà, un max.

<u>Teorema</u> Se K è compatto, allora $\mathcal{C}(K)$, munito della norma dell'estremo superiore, è uno spazio di Banach.

<u>Dim</u>. Dobbiamo mostrare che se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{C}(K)$, allora esiste $f \in \mathcal{C}(K)$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Poiché $\{f_n\}$ è di Cauchy in $\mathscr{C}(K)$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$ t.c.

$$\sup_{x \in K} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| = \| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon .$$

Quindi $\{f_n\}$ è di Cauchy per la convergenza uniforme. Per un teorema della lezione precedente esiste una f.ne f su K t.c. $f_n \to f$ unif.te in K. Per il corollario precedente, $f \in \mathscr{C}(K)$. Poiché $f_n \to f$ unif.te

$$\| f_n - f \|_\infty = \sup_{x \in K} \left| f_n(x) - f(x) \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 ,$$

cioè $f_n \to f$ in $\mathscr{C}(K)$. $\square$

<u>Oss.</u> Indichiamo con $\mathscr{C}_b(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni **continue e limitate su X; qui X non è (necessariamente) compatto;** possiamo normare $\mathscr{C}_b(X)$ con la norma dell'estremo superiore.

<u>Teorema</u> $\mathscr{C}_b(X)$, munito della norma dell'estremo superiore, è uno spazio di Banach.

<u>Dim.</u> La stessa di prima, **mutatis mutandis.** $\square$

Convergenza uniforme e integrazione

Teorema. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni Riemann integrabili in $[a,b]$, uniformemente convergente a f in $[a,b]$. Allora f è Riemann integrabile in $[a,b]$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

Dim. Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due partizioni di $[a,b]$ e sia

$$\varepsilon_n := \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

Questa relazione assicura che

$$(*) \qquad f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n$$

Osserviamo che $s(\mathcal{P}; f_n - \varepsilon_n) = s(\mathcal{P}; f_n) - \varepsilon_n(b-a)$ e che $S(\mathcal{Q}; f_n + \varepsilon_n) = S(\mathcal{Q}; f_n) + \varepsilon_n(b-a)$. Utilizzando $(*)$, abbiamo che

$$s(\mathcal{P}; f_n) - \varepsilon_n(b-a) \leq s(\mathcal{P}; f) \leq S(\mathcal{Q}; f) \leq S(\mathcal{Q}; f_n) + \varepsilon_n(b-a)$$

da cui, prendendo il sup rispetto a $\mathcal{P}$ e l'inf rispetto a $\mathcal{Q}$,

$$(**) \quad \int_a^b f_n - \varepsilon_n(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \int_a^b f_n + \varepsilon_n(b-a)$$

Perciò

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq 2\varepsilon_n(b-a) \qquad \forall n$$

Facendo il limite per n tendente a $+\infty$, otteniamo

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

e quindi $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Applicando nuovamente (**), e tenendo conto che $\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f$, otteniamo

$$-\varepsilon_n (b-a) \leq \int_a^b f_n - \int_a^b f \leq \varepsilon_n (b-a)$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = 0. \qquad \square$$

<u>**Corollario.**</u> Sia $\{f_n\}$ una successione di f.ni Riemann integrabili in $[a,b]$, uniformemente e supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converga a f. Allora f è Riemann integrabile in $[a,b]$, e

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

<u>**Dim.**</u> Segue direttamente dal teorema precedente, applicato alla successione $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. $\square$

Convergenza uniforme e differenziabilità

Teorema. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni differenziabili in $[a,b]$. Supponiamo che esista un p.to $x_0 \in [a,b]$ t.c. $\{f_n(x_0)\}$ converga e che $\{f_n'\}$ converga unif.te in $[a,b]$. Allora $\{f_n\}$ converge unif.te in $[a,b]$ a una funzione f e

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dim. (nell'ipotesi ulteriore che $f_n \in \mathscr{C}^1([a,b])$)

Poniamo $A := \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$ e

$$(*) \qquad f(x) = A + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b],$$

dove g è il limite uniforme di $\{f_n'\}$. Tale limite è continuo (perché f_n' è continua) e quindi Riemann integrabile. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ e $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, cioè

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Rimane da dimostrare che $\{f_n\}$ converge unif.te a f. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$(**) \qquad f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

Utilizzando $(*)$ e $(**)$, abbiamo

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |A - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} [f'(t) - f_n'(t)]\, dt \right|$$

$$\leq \underbrace{|A - f_n(x_0)|}_{\substack{< \varepsilon \text{ per} \\ n \text{ grande}}} + \int_a^b \underbrace{|f'(t) - f_n'(t)|}_{\substack{< \varepsilon \text{ per } n \text{ grande} \\ \text{e } \forall t \in [a,b]}} dt$$

$$< \varepsilon\,(1 + b - a)$$

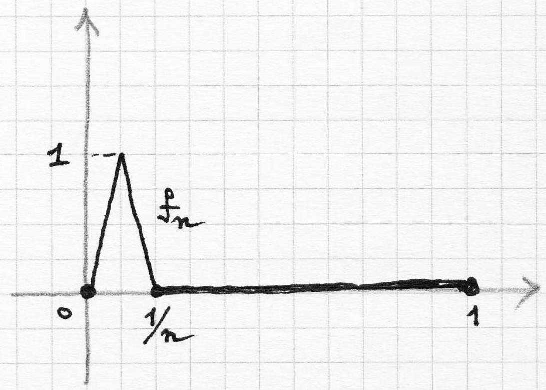
per n grande, da cui la tesi $\square$

Norme inequivalenti su $\mathscr{C}([a,b])$

<u>Def.</u> La **norma integrale** su $\mathscr{C}([a,b])$ è definita come segue

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f|$$

La verifica che $\|\cdot\|_1$ è effettivamente una norma è semplice. Mostriamo che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono **norme inequivalenti** su $\mathscr{C}([a,b])$. Sia f_n come in figura:



$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}, \quad \|f_n\|_\infty = 1$$

Quindi $\nexists\, C > 0$ t.c.

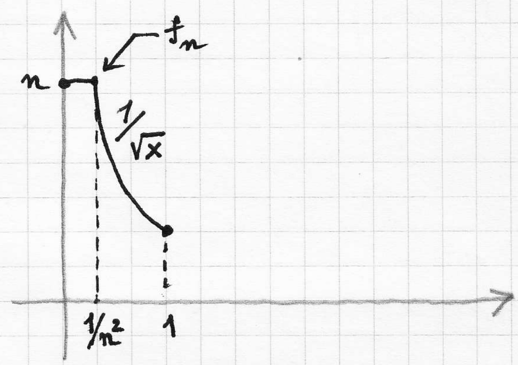
$$\|f_n\|_\infty \leq C\, \|f_n\|_1 \quad \forall n$$

D'altra parte, invece,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in \mathscr{C}([a,b])$$

Abbiamo in precedenza dimostrato che $\mathscr{C}([a,b])$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach. Mostriamo ora che $\mathscr{C}([a,b])$, munito della norma $\|\cdot\|_1$ **non** è **uno spazio di Banach.**

Sia f_n come in figura. Evidentemente $f_n \in \mathscr{C}([0,1])$.



La successione $\{f_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma integrale. Infatti,

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n - f_m|$$
$$= \int_0^{1/n^2} (n-m)\,dx$$
$$+ \int_{1/n^2}^{1/m^2} (x - m)\,dx$$
$$\to 0 \quad \text{per } n, m \to +\infty.$$

Supponiamo che esista $f \in \mathscr{C}([0,1])$ t.c. $\|f_n - f\|_1 \to 0$ per n tendente a $+\infty$. Sia $\varepsilon > 0$. Poiché per n sufficientemente grande [cioè per tutti gli n tali che $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$] abbiamo

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in [\varepsilon, 1];$$

deve perciò accadere che

$$0 \underset{n\to\infty}{\leftarrow} \int_\varepsilon^1 |f(x) - f_n(x)|\,dx = \int_\varepsilon^1 \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx.$$

Poiché $f \in \mathscr{C}([0,1])$, deve essere

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in [\varepsilon, 1],$$

e questo deve accadere per ogni $\varepsilon > 0$.

Ma questo contraddice il fatto che $f \in \mathcal{C}([0,1])$.
Possiamo concludere che $\{f_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$, e che $\{f_n\}$ non ammette limite (in norma $\|\cdot\|_1$) nello spazio $\mathcal{C}([0,1])$

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

LEZIONE 3

Serie di potenze

Ricordiamo il criterio della radice per serie a termini reali (o complessi)

Teorema Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali (o complessi) e poniamo

$$\alpha := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Valgono:

(i) se $\alpha < 1$, allora $\sum a_n$ converge

(ii) se $\alpha > 1$, allora $\sum a_n$ non converge

[se $\alpha = 1$ nulla si può dire senza ulteriori indagini]

Una serie di potenze è una serie di funzioni della forma

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

dove x_0 è un punto fissato di $\mathbb{R}$, $\{c_n\}$ è una successione di numeri reali e x è una variabile reale.

Con una traslazione è sempre possibile ricondursi al caso $x_0 = 0$. È anche possibile considerare il caso in cui c_n, x e x_0 siano complessi: tuttavia, nel seguito supporremo c_n, x e x_0 reali, per semplicità.

Chiamiamo **insieme di convergenza** della serie di potenze (*) l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ converge.

Vedremo che l'insieme di convergenza di una serie di potenze è sempre un **intervallo** (si parla anche di **intervallo di convergenza**)

Teorema Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, poniamo

$$\alpha := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \qquad e \qquad R := \frac{1}{\alpha}$$

(se $\alpha = +\infty$, allora $R = 0$ e se $\alpha = 0$, allora $R = +\infty$).

La serie di potenze converge se $|x| < R$ e non converge se $|x| > R$

Dim. $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \alpha$.

Per il criterio della radice la serie converge se $|x| \alpha < 1$, cioè se $|x| < R$, e non converge se $|x| \alpha > 1$, cioè se $|x| > R$. $\square$

Def. Data $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, il numero $R := \dfrac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ si chiama **raggio di convergenza** della serie.

Es. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ ha raggio di convergenza 0;

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ha raggio di convergenza 1;

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ ha raggio di convergenza $+\infty$.

Oss. Il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza presenta vari casi:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; $R=1$ e la serie converge in ± 1

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $R=1$, la serie converge in -1 e diverge in 1

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$; $R=1$ e la serie non converge nè in 1 né in -1.

Teorema Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ converga per $|x|<r$. Poniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \qquad \forall x \in (-r, r).$$

Allora, per ogni $\varepsilon>0$ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ converge uniformemente a $f(x)$ in $[-r+\varepsilon, r-\varepsilon]$. Inoltre $f \in \mathscr{C}^{\infty}((-r,r))$ e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n\, x^{n-k} \qquad \forall x \in (-r, r).$$

In particolare

$$(*) \qquad f^{(k)}(0) = k!\, c_k \qquad k = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

Dim. Sia $\varepsilon>0$ fissato. Se $|x| \leq r-\varepsilon$, allora

$$|c_n x^n| \leq |c_n| (r-\varepsilon)^n.$$

Necessariamente $r \leq R$ (= raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$) e quindi

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|(r-\varepsilon)^n} = \frac{r-\varepsilon}{R} < 1.$$

Conseguentemente $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (r-\varepsilon)^n < \infty$ e la convergenza uniforme di $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in $[-r+\varepsilon, r-\varepsilon]$ segue da (*) e dal criterio di convergenza uniforme per serie.

Poiché

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(n-1)\cdots(n-k+1)|c_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

le serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e $\sum_{n=k}^{\infty} c_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1) x^n$ hanno lo stesso intervallo di convergenza.

Consideriamo, ad esempio, il caso $k=1$. Ripetendo l'argomento utilizzato all'inizio della dimostrazione, otteniamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ converge uniformemente in $[-r+\varepsilon, r-\varepsilon]$. Possiamo allora utilizzare il Teorema di derivazione per serie e concludere che f è derivabile in $[-r+\varepsilon, r-\varepsilon]$ e che

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad \forall x \in [-r+\varepsilon, r-\varepsilon]$$

Facendo variare $\varepsilon > 0$, si ottiene l'asserto. $\square$

<u>Oss.</u> Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge in $(-R,R)$, con somma $f(x)$, diciamo che f è sviluppabile in serie di potenze centrata in 0. Notiamo che c_n è determinata direttamente da f. Infatti, per la formula (*) del teorema precedente

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad n=0,1,2,3,\dots$$

Tuttavia, una funzione $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ non è necessariamente sviluppabile in serie di potenze in $(-R,R)$ per qualche $R>0$.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(0) = 0$ per $n = 1, 2, 3, \dots$ (per induzione); la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ha per somma la funzione identicamente nulla. Quindi non può esistere alcuna serie di potenze con somma $f(x)$ in un intervallo contenente 0.

Serie di Taylor

L'esempio precedente suggerisce il problema seguente. Siano U un intorno di 0 e $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$. Possiamo formare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

che si chiama **serie di Taylor** di f. Sotto quali condizioni essa converge (necessariamente a $f(x)$) in un intorno di 0 ?

Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie di Taylor di f converga in x è che

$$\lim_{n \to +\infty} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] = 0$$

Per il Teorema di Taylor, esiste ξ nell'intervallo di estremi 0 e x tale che

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Da questa formula deduciamo che f è sviluppabile in serie di Taylor in $(-r,r)$ se $\exists\, M>0$

$$\sup_{x\in(-r,r)} |f^{(n)}(x)| \leq M \cdot n! \cdot r^{-n} \qquad n=0,1,2,3,\dots$$

In particolare ciò accade se $\exists\, K>0$ t.c.

$$\sup_{x\in(-r,r)} |f^{(n)}(x)| \leq K^n \qquad n=0,1,2,3,\dots$$

Utilizzando questo criterio, si possono dimostrare i seguenti sviluppi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R=+\infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R=+\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad R=+\infty$$

$$(*) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad R=1$$

Derivando quest'ultimo, si ha

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad R=1,$$

mentre, integrandolo otteniamo

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad R=1$$

Sostituendo $-x$ a x in $(*)$, abbiamo

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad R=1,$$

da cui

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad R=1.$$

Infine, integrando, otteniamo

$$\operatorname{artg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad R=1$$

Vale anche il seguente importantissimo sviluppo

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad R=1,$$

dove $\displaystyle\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

Concludiamo questa parte con un'applicazione.
Determinare, con un errore inferiore a 10^{-2}, il valore dell'integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

Da uno degli sviluppi precedenti

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La serie è unif. convergente in $[-r,r]$ per ogni $r>0$, in particolare in $[0,1]$. Per il teorema di integrazione per serie

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2n+1} + R_N .$$

Poiché $|R_N| \leq \frac{1}{(2N+3)(N+1)!}$, per avere $|R_N| < 10^{-2}$ è sufficiente prendere $N=3$. Un'approssimazione accettabile è allora

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42}$$